# definizioni importanti

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Problema di programmazione lineare primale standard: problema di massimo (della funzione obiettivo) con funzione lineare di n variabili soggetta a vincoli lineari di $\leq$.

"Problema di massimo di una funzione lineare su un poliedro".

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Poliedro:

def 1: Un poliedro di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$.

def 2: Un poliedro $P \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni lineari in n variabili, ovvero

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

dove A è una matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

- Un poliedro è un <u>insieme convesso</u>.

Insieme convesso: Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice convesso se, comunque si scelgono due punti $x_1$ e $x_2 \in K$ si ha:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in K \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Combinazione convessa: Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa di $x_1 \dots x_m \in \mathbb{R}^n$ se esistono dei coefficienti $\lambda_1 \dots \lambda_m$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \quad \lambda_i \in [0,1] \ \forall i \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

Se $0 < \lambda_i < 1 \ \forall i$, la combinazione si dice PROPRIA.
· Si indica $\boxed{\text{conv}\{x_1 \dots x_k\}}$ l'insieme di tutte le combinazioni convesse di $x_1 \dots x_k$

Combinazione conica: Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x_1 \dots x_m \in \mathbb{R}^n$ se

$$\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_m : \ x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \quad \lambda_i \geq 0 \ \forall i$$

Se $\lambda_i > 0 \ \forall i$, la combinazione si dice PROPRIA.
· Si indica $\boxed{\text{cono}\{x_1 \dots x_k\}}$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di $x_1 \dots x_k$.

Vertice: Un punto $\bar{x} \in P$ si dice vertice del poliedro P se non si può esprimere come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro.
· L'insieme dei vertici di un poliedro P viene denotato con vert(P).

Direzione di recessione: Un vettore d è una direzione di recessione per il poliedro P se P contiene tutte le semirette di direzione d uscenti da punti appartenenti a P.

Soluzione di base primale:
Sia B un insieme di m indici di riga, $B \subseteq \{1 \dots m\}$, che chiameremo <u>base</u>, tale che la sottomatrice $A_B$, ottenuta da A estraendo le righe $A_i$, con $i \in B$, sia invertibile, ovvero $\det(A_B) \neq 0$.
$A_B$ si chiamerà <u>matrice di base</u>.
Indicheremo con N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B.

la soluzione del sistema $A_B \bar{x} = b_B$, dove b è il vettore di n componenti estratto da B, si chiamerà soluzione di base primale:

$$\boxed{\bar{x} = A_B^{-1} b_B}$$

Soluzione di base ammissibile: Una soluzione di base si dice ammissibile se appartiene al poliedro.
Soluzione di base non ammissibile: Una soluzione di base si dice non ammissibile se non appartiene al poliedro.
SOLUZIONE DI BASE PRIMALE *

Soluzione di base duale: Si chiama soluzione di base duale il vettore $\bar{y}$ che si ottiene ponendo a 0 le variabili non di base e risolvendo il sistema che risulta con unica soluzione:

$$\bar{y}_N = 0 \quad y_B A_B = c \quad \boxed{y_B = c A_B^{-1}}$$

Soluzione di base duale ammissibile: $c A_B^{-1} \geq 0$
Soluzione di base duale non ammissibile: $c A_B^{-1} < 0$

Soluzione di base PRIMALE degenere: Una soluzione di base si dice degenere se è generata da più basi, non degenere se è generata da una base sola. *primale

Soluzione di base duale degenere: Una soluzione di base duale si dice degenere se almeno una delle componenti di base è uguale a 0, non degenere se sono tutte diverse da zero.

* Problema di programmazione lineare duale standard: Si dice problema duale standard un problema di minimo di PL con tutti i vincoli di equazioni e le variabili vincolate in segno a essere positive.

$$\begin{cases} \min yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Grafo connesso: Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di nodi del grafo esiste un cammino, non necessariamente orientato, che li connette.

Albero di copertura: Nel grafo $(N, A)$ un albero di copertura è un sottoinsieme di archi $T \subseteq A$ tale che il sottografo $(N, T)$ sia connesso e non contenga cicli. Una foglia di T è un nodo sul quale incide un solo arco di T.

Taglio: Un taglio $(N_s, N_t)$ è una partizione dell'insieme N dei nodi in due sottoinsiemi, cioè

$$N = N_s \cup N_t \quad e \quad N_s \cap N_t = \emptyset$$

Un taglio $(N_s, N_t)$ si dice ammissibile se $N_s$ contiene almeno l'origine s e $N_t$ contiene almeno la destinazione t.

·Gli archi diretti e inversi del taglio $(N_s, N_t)$ sono così definiti:

$$A^+ = \{(i,j) \in A : i \in N_s, j \in N_t\} \text{ archi diretti}$$
$$A^- = \{(i,j) \in A : i \in N_t, j \in N_s\} \text{ archi inversi}$$

Capacità del taglio: la capacità del taglio $(N_s, N_t)$ è definita come la somma delle capacità degli archi diretti del taglio

$$u(N_s, N_t) = \sum'_{(i,j)\in A^+} u_{ij}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Flusso sul taglio: dato un flusso $x$, il valore del flusso sul taglio $(N_s, N_t)$ è definito come la differenza tra la somma dei flussi sugli archi diretti e la somma dei flussi sugli archi inversi:

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A^-} x_{ij}$$

Grafo residuo: dato un flusso $x$ ammissibile, il grafo residuo, relativo a $x$, è un grafo $G(x) = (N, A(x))$ con gli stessi nodi del grafo $G$, mentre gli archi e le loro capacità $r_{ij}$, delle residue, sono così definiti:

$(i,j) \in A,\ x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow (i,j) \in A(x),\ r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

$(i,j) \in A,\ x_{ij} > 0 \Rightarrow (j,i) \in A(x),\ r_{ij} = x_{ij}$

Cammino Aumentante: dato un flusso $x$ ammissibile, un cammino aumentante, rispetto a $x$, è un cammino orientato da $s$ a $t$ nel grafo residuo $G(x)$

Disuguaglianza valida: la disequazione $fx \le f_0$ è detta disuguaglianza valida (DV) per l'insieme $\Omega$ se $fx \le f_0\ \forall x \in \Omega$

- Se $fx \le f_0$ è DV per $\Omega$, allora è una DV anche per $\text{conv}\,\Omega$.